Solusi Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Runge-Kutta Orde Lima

Fardinah[i]

[i] *STKIP YPUP Makassar, fardinah.fardinah@gmail.com*

ABSTRAK, Penelitian ini merupakan studi literatur dengan menggunakan metode numerik yang digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa dengan bentuk $y' = f(x, y)$ dengan suatu nilai awal $y(x_0) = y_0$ yang diberikan.

Metode numerik yang digunakan yaitu metode Runge-Kutta Orde Lima. Prinsip kerja dari metode tersebut pada dasarnya adalah menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan menentukan himpunan titik-titik (x, y) dimana untuk menentukan sebuah titik maka kita menggunakan satu titik sebelumnya. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta Orde Lima dapat dignakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa dan memiliki tingkat ketelitian yang relatif tinggi

***Kata Kunci**: Persamaan diferensial biasa, metode Runge-Kutta, Masalah nilai awal*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan mata kuliah yang cukup strategis karena berkaitan dengan bagian-bagian sentral dalam matematika seperti dalam analisis, aljabar, geometri dan bagain sental lain yang akan sangat berperan dalam pengenalan konsep maupun pemecahan masalah yang berkaitan dengan dunia nyata.

Solusi persamaan diferensial dapat ditentukan dengan menggunakan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik memberikan solusi sejati yaitu solusi yang memiliki galat (error) sama dengan nol sedangkan dengan metode numerik kita memperoleh solusi yang menghampiri solusi sejati. Namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan.

Sayangnya, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana. Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan dapat dicari dengan menggunakan metode numerik. Metode tersebut diantaranya adalah metode Euler, metode Deret Taylor, dan metode Runge-Kutta.

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang lebih praktis dari pada metode deret Taylor karena dengan metode Runge-Kutta kita tidak perlu mencari turunan fungsi yang lebih tinggi. Kita hanya mengevaluasi fungsi pada titik terpilih untuk setiap selang langkah. Sedangkan dari segi ketelitian, hasil yang diperoleh dari metode Runge-Kutta lebih teliti dibandingkan metode Euler. Tingkat ketelitian dari metode ini dipengaruhi oleh ordenya. Semakin besar ordenya maka semakin teliti hasil yang diperoleh..

2. TINJAUAN PUSTAKA

Metode Runge-Kutta Orde Lima merupakan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial yang berbentuk masalah nilai awal.

Masalahnilaiawaladalahpersamaandiferensial yang berkaitandengannilaiawal (nilaiawaladalahsyaratbatas di satutitik)yang berbentuk $y' = f(x, y)$ dengan sebuah nilai awal $y(x_0) = y_0$, dengan fungsi f bergantung pada x dan y, (Talib, 2003:4)

Pada umumnya metode numerik diturunkan berdasarkan penghampiran fungsi ke dalam bentuk polinom. Alat utama untuk membuat polinom hampiran adalah Deret Taylor.Misalkan f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ menyatakan turunan pertama, kedua, dan seterusnya yang juga kontinu pada selang tersebut. Misalkan $x_r \in [a, b]$, maka untuk nilai x_{r+1} disekitar x_r dengan $x_{r+1} \in [a, b]$, $f(x_{r+1})$ dengan $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor sebagai berikut:

$$f(x_{r+1})=f(x_r)+\frac{(x_{r+1}-x_r)}{1!}f^{(1)}(x_r)+\frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!}f^{(2)}(x_r)+\ldots+\frac{(x_{r+1}-x_r)^n}{n!}f^{n}(x_r)+\ldots$$

Jika dimisalkan $x_{r+1}-x_r=h$, *maka* $f(x_{r+1})$ *dapat juga ditulis sebagai berikut:*

$$f(x_{r+1})=f(x_r)+\frac{h}{1!}f^{(1)}(x_r)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_r)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{n}(x_r)+\ldots$$

Selanjutnya jika $f(x_{r+1})=y_{r+1}$ *maka deret Taylor tersebut dapat ditulis:*

$$y_{r+1}=y_r+\frac{h}{1!}f^{(1)}(x_r)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_r)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{n}(x_r)+\ldots$$

(Paduppai, 2006:3-4)

Ketelitian suatu metode numerik diselidiki dengan cara menentukan galat. Misalkan $\hat{a}$ menyatakan nilai dari hasil metode numerik dan a menyatakan nilai dari hasil metode analitik, maka galat (ε) mutlak didefinisikan sebagai $|\varepsilon|=\left|a-\hat{a}\right|$.(Paduppai, 2006:6)

3. METODOLOGI

Langkah-langkah penentuan solusi persamaan diferensial dengan metode runge-kutta dilakukan sebagai berikut: menentukan formula dari Metode Runge-Kutta Orde Lima, menyelesaikan masalah nilai awal dengan Metode Runge-Kutta Orde Lima dan metode analitik serta menentukan galat Metode Runge-Kutta Orde Lima.

4. PEMBAHASAN

Diberikan bentuk umum persamaan metode Runge-Kutta Orde Lima yaitu:

$$y_{r+1}=y_r+(a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3+a_4k_4+a_5k_5+a_6k_6)h \qquad (4.1)$$

dimana:

$$k_1=f(x_r,\, y_r)$$

$$k_2=f(x_r+p_1h,\; y_r+q_{11}k_1h)$$

$$k_3=f(x_r+p_2h,\; y_r+q_{21}k_1h+q_{22}k_2h)$$

$$k_4=f(x_r+p_3h,\; y_r+q_{31}k_1h+q_{32}k_2h+q_{33}k_3h)$$

$$k_5=f(x_r+p_4h,\; y_r+q_{41}k_1h+q_{42}k_2h+q_{43}k_3h+q_{44}k_4h)$$

$$k_6=f\begin{pmatrix} x_r+p_5h,\; y_r+q_{51}k_1h+q_{52}k_2h+ \\ q_{53}k_3h+q_{54}k_4h+q_{55}k_5h \end{pmatrix}$$

$$dengan\; h=x_{r+1}-x_r\; dan\;\; r=0,1,2,\ldots,n$$

Selanjutnya persamaan (4.1) disamakan dengan deret Taylor orde enam yaitu:

$$y_{r+1}=y_r+\frac{h}{1!}f^{(1)}(x_r,y_r)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_r,y_r)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_r,y_r)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_r,y_r)$$
$$+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x_r,y_r)+\frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x_r,y_r)$$

Jika f fungsi sebarang, maka diperoleh:

$$f^{(1)}(x_r,\, y_r)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$f^{(2)}(x_r,\, y_r)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$f^{(3)}(x_r,\, y_r)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}+3\frac{\partial^3 y}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

$$f^{(4)}(x_r,\, y_r)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\frac{dy}{dx}+6\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$$

$$f^{(5)}(x_r,\, y_r)=\frac{\partial^5 f}{\partial x^{54}}+5\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}\frac{dy}{dx}+10\frac{\partial^5 y}{\partial x^3\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+10\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+5\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^5$$

Dengan mensubtitusi $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}$ ke deret Taylor orde enam, diperoleh:

$$y_{r+1}=y_r+h\,f(x_r,\, y_r)+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]+$$
$$\frac{h^3}{6}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]+$$
$$\frac{h^4}{24}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}+3\frac{\partial^3 y}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]$$
$$+\frac{h^5}{120}\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\right.$$
$$\left.\frac{dy}{dx}+6\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]$$
$$+\frac{h^6}{720}\left[\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}+5\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}\frac{dy}{dx}\right.$$
$$+10\frac{\partial^5 y}{\partial x^3\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+10\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \qquad (4.2)$$
$$\left.+5\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^5\right]$$

Selanjutnya menentukan nilai-nilai $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,q_{11},q_{21},q_{22},q_{31}$

$q_{32},q_{33},q_{41},q_{42},q_{43},q_{44},q_{51},q_{52},q_{53},q_{54},q_{55}$ dengan menyamakan persamaan (4.1) dengan k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6 pada deret Taylor persamaan (4.2).

dengan:

$$k_1 = f(x_r,\ y_r)$$

$$k_2 = f(x_r,y_r)+p_1\frac{\partial}{\partial x}h+q_{11}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h$$

$$k_3 = f(x_r,y_r)+p_2\frac{\partial}{\partial x}h+q_{21}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{22}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+$$
$$p_1q_{22}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2 f(x_r,y_r)+q_{11}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2$$

$$k_4 = f(x_r,y_r)+p_3\frac{\partial}{\partial x}h+q_{31}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+$$
$$q_{32}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_1\frac{\partial}{\partial x}h+q_{11}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$f(x_r,y_r)h\Big]h+\ q_{33}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_2\frac{\partial}{\partial x}h$$
$$+q_{21}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+\ q_{22}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)$$
$$h+p_1q_{22}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{11}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2\ \Big]h$$

$$k_5 = f(x_r,y_r)+p_4\frac{\partial}{\partial x}h+q_{41}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h$$
$$+q_{42}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_1\frac{\partial}{\partial x}h+q_{11}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$f(x_r,y_r)h\Big]h+\ q_{43}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_2\frac{\partial}{\partial x}h$$
$$+q_{21}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+\ q_{22}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)$$
$$h+p_1q_{22}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{11}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2\ \Big]h$$
$$+q_{44}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_3\frac{\partial}{\partial x}h+$$
$$q_{31}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{32}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h$$
$$+\ q_{32}\ p_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{32}\ q_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2\ +$$
$$q_{33}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{33}p_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{32}q_{21}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2+$$
$$q_{32}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^{\ 2}$$
$$+q_{33}\ q_{22}p_1\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}h^3+q_{33}q_{22}\ q_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(x_r,y_r)h^3\Big]h$$

$$k_6 = f(x_r,y_r)+p_5\frac{\partial}{\partial x}h+q_{51}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h$$
$$+q_{52}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_1\frac{\partial}{\partial x}h+q_{11}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$f(x_r,y_r)h\Big]h+\ q_{53}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_2\frac{\partial}{\partial x}h$$
$$+q_{21}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+\ q_{22}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)$$
$$h+p_1q_{22}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{11}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2\ \Big]h$$
$$+q_{54}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_3\frac{\partial}{\partial x}h+$$
$$q_{31}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{32}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h$$
$$+\ q_{32}\ p_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{32}\ q_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2+$$
$$q_{33}\frac{\partial}{\partial y}\ f(x_r,y_r)h+q_{33}p_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2$$
$$+q_{32}q_{21}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2+\ q_{32}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)$$
$$h^2+q_{33}\ q_{22}p_1\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}h^3+q_{33}q_{22}\ q_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(x_r,y_r)h^3\Big]h$$
$$+q_{55}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\ f(x_r,y_r)+p_4$$
$$\frac{\partial}{\partial x}h+q_{41}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{42}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{42}p_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2$$
$$+q_{42}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2$$
$$+q_{43}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{43}p_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{43}q_{21}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2$$
$$+\ q_{43}q_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)$$
$$h^2+q_{43}\ q_{22}p_1\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}h^3+q_{43}q_{22}\ q_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(x_r,y_r)h^3$$
$$+q_{44}\frac{\partial}{\partial y}f(x_r,y_r)h+q_{44}$$
$$p_3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h^2+q_{44}q_{31}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2+q_{44}q_{31}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2$$
$$+q_{44}q_{32}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)$$
$$h^2+q_{44}q_{32}p_1\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}h^3+q_{44}q_{32}q_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(x_r,y_r)h^3$$
$$+q_{44}q_{33}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_r,y_r)h^2+$$
$$q_{33}q_{22}\,p_1\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}h^4+q_{44}q_{33}q_{22}q_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}f(x_r,y_r)h^4\ \Big]h$$

Subtitusi nilai k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6 pada persamaan (4.1) dan selanjutnya berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1$$

$$a_2p_1+a_3p_2+a_4p_3+a_5p_4+a_6p_5=\frac{1}{2}$$

$$a_2q_{11}+a_3q_{21}+a_3q_{22}+a_4q_{31}+a_4q_{32}+a_5q_{41}+a_5q_{42}$$
$$+a_5q_{43}+a_5q_{44}+a_6q_{51}+a_6q_{52}+$$
$$a_6q_{53}+a_6q_{54}+a_6q_{55}=\frac{1}{2}$$

$$a_3q_{22}p_1+a_4q_{32}p_1+a_4q_{33}p_2+a_5q_{42}p_1+a_5q_{43}p_2$$
$$+a_5q_{44}p_3+a_6q_{52}p_1+a_6q_{53}p_2+$$
$$a_6q_{54}p_3+a_6q_{55}p_4=\frac{1}{6}$$

$$a_3q_{22}q_{11}+a_4q_{32}q_{11}+a_4q_{33}q_{21}+a_4q_{33}q_{22}+a_5q_{42}q_{11}$$
$$+a_5q_{43}q_{21}+a_5q_{43}q_{22}+a_5q_{44}q_{31}$$
$$+a_5q_{44}q_{32}+a_5q_{44}q_{33}+a_6q_{52}q_{11}+a_6q_{53}q_{21}+a_6q_{53}q_{22}$$
$$+a_6q_{54}q_{31}+a_6q_{54}q_{32}+a_6q_{54}q_{33}$$
$$+a_6q_{55}q_{41}+a_6q_{55}q_{42}+a_6q_{55}q_{43}+a_6q_{55}q_{44}=\frac{1}{6}$$

$$a_4q_{33}q_{22}p_1+a_5q_{43}q_{22}p_1+a_5q_{44}q_{32}p_1+a_5q_{44}q_{33}p_2$$
$$+a_5q_{44}q_{33}p_2+a_6q_{53}q_{22}p_1+a_6$$
$$a_6q_{54}q_{32}p_1+q_{54}q_{33}p_2+a_6q_{54}q_{33}p_2+a_6q_{55}q_{42}p_1$$
$$+a_6q_{55}q_{43}p_2+a_6q_{55}q_{44}p_3=\frac{1}{24}$$

$$a_4q_{33}q_{22}q_{11}+a_5q_{43}q_{22}q_{11}+a_5q_{44}q_{32}q_{11}+a_5q_{44}q_{33}q_{21}$$
$$+a_5q_{44}q_{33}q_{22}+a_6q_{54}q_{32}q_{11}+$$
$$a_6q_{54}q_{33}q_{11}+a_6q_{54}q_{33}q_{22}+a_6q_{53}q_{22}q_{11}+a_6q_{55}q_{42}q_{11}$$
$$+a_6q_{55}q_{43}q_{21}+a_6q_{55}q_{43}q_{22}+$$
$$a_6q_{55}q_{44}q_{32}+a_6q_{55}q_{44}q_{33}=\frac{1}{24}$$

$$a_5q_{44}q_{33}q_{22}p_1+a_6q_{54}q_{33}q_{22}p_1+a_6q_{55}q_{43}q_{22}p_1$$
$$+a_6q_{55}q_{44}q_{32}p_1+a_6q_{55}q_{44}q_{33}p_2=\frac{1}{120}$$

$$a_5q_{44}q_{33}q_{22}q_{11}+a_6q_{54}q_{33}q_{22}q_{11}+a_6q_{55}q_{43}q_{22}q_{11}$$
$$+a_6q_{55}q_{44}q_{32}q_{11}+a_6q_{55}q_{44}q_{33}q_{21}+$$
$$a_6q_{55}q_{44}q_{33}q_{22}=\frac{1}{120}$$

$$a_6q_{55}q_{44}q_{33}q_{22}p_1=\frac{1}{720}$$

$$a_6q_{55}q_{44}q_{33}q_{22}q_{11}=\frac{1}{720}$$

Hasil yang diperoleh di atas menyebabkan solusi yang tak hingga banyaknya, namun metode Runge-Kutta Orde Lima yang biasa dipakai yaitu:

$$y_{r+1}=y_r+\frac{1}{90}\left[7k_1+32k_3+12k_4+32k_5+7k_6\right]h$$

dengan:

$$k_1=f\left(x_r,y_r\right)$$

$$k_2=f\left(x_r+\frac{1}{4}h,\ y_r+\frac{1}{4}hk_1\right)$$

$$k_3=f\left(x_r+\frac{1}{4}h,\ y_r+\frac{1}{8}hk_1+\frac{1}{8}hk_2\right)$$

$$k_4=f\left(x_r+\frac{1}{2}h,\ y_r-\frac{1}{2}hk_2+hk_3\right)$$

$$k_5=f\left(x_r+\frac{3}{4}h,\ y_r-\frac{3}{16}hk_1+\frac{9}{16}hk_4\right)$$

$$k_6=f\left(x_r+h,\ y_r-\frac{3}{7}hk_1+\frac{2}{7}hk_2+\frac{12}{7}hk_3-\frac{12}{7}hk_4+\frac{8}{7}hk_5\right)$$

dimana $r=0,1,2,\ldots,n$ *dan* $h=x_{r+1}-x_r$

Simulasi

Selesaikan persamaan $y'+\frac{y}{x+1}=-\frac{(x+1)^3y^3}{2}$ dengan nilai awal $y(1)=0.40825$ dan nilai $h=0,1$

Penyelesaian:

Metode analitik

$y'+\frac{y}{x+1}=-\frac{(x+1)^3y^3}{2}$ dapat diubah menjadi

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{(x+1)^3y^3}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{(x+1)^3y^3}{2} \qquad : \qquad y^3$$

diperoleh

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{y^{-2}}{x+1}=-\frac{(x+1)^3}{2} \qquad (2)$$

Misalkan $z=y^{-2}$ diperoleh $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

Maka persamaan (2) menjadi

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x+1}=-\frac{(x+1)^3}{2}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x+1} = (x+1)^3 \qquad (3)$$

Misalkan $z = uv$ diperoleh $\frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

subtitusi pada persamaan (3) diperoleh $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$

$$u\frac{dv}{dx} - \frac{2uv}{x+1} + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1}\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3 \qquad (4)$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0$ maka $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1}$ diperoleh $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{2}{x+1} dx$$

$\ln v = 2\ln(x+1)$ atau $\ln v = \ln(x+1)^2$

diperoleh $v = (x+1)^2$

selanjutnyadaripersamaan (4) diperoleh:

$u(0) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$ diperoleh $v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

$$\frac{du}{dx} = (x+1)$$

$$du = (x+1)dx$$

$$\int du = \int (x+1)dx$$

$$u = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

$z = uv$ *maka* $z = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)(x+1)^2$

Karena $z = y^{-2}$ diperoleh $y^{-2} = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)(x+1)^2$

Subtitusi nilai awal $y(1) = 0.40825$ maka

$$(0.40825)^{-2} = \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 1 + c\right)(1+1)^2$$

$$6 = \left(\frac{3}{2} + c\right)(2)^2 = 6 + 4c$$

$6 - 6 = 4c$ *atau* $4c = 0$, *diperoleh* $c = 0$

Jadi solusi khusus dari $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{(x+1)^3 y^3}{2}$ adalah $y^{-2} = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)(x+1)^2$

- *Untuk* $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1$ *maka* $y = \sqrt{\frac{1}{7.51905}} = 0.36469$
- *Untuk* $x_2 = x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2$ *maka* $y = \sqrt{\frac{1}{9.29280}} = 0.32804$
- *Untuk* $x_3 = x_2 + h = 1.2 + 0.1 = 1.3$ *maka* $y = \sqrt{\frac{1}{11.34705}} = 0.29686$
- *Untuk* $x_4 = x_3 + h = 1.3 + 0.1 = 1.4$ *maka* $y = \sqrt{\frac{1}{13.70880}} = 0.27008$
- *Untuk* $x_5 = x_4 + h = 1.4 + 0.1 = 1.5$ *maka* $y = \sqrt{\frac{1}{16.40625}} = 0.24689$
- *Untuk* $x_6 = x_5 + h = 1.5 + 0.1 = 1.6$ *maka* $y = \sqrt{\frac{1}{19.46880}} = 0.22664$

Metode Runge-Kutta Orde Lima

Dari $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{(x+1)^3 y^3}{2}$ diketahui $f(x,y) = -\frac{(x+1)^3 y^3}{2} - \frac{y}{x+1}$

Dengan menggunakan rumus:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right] h$$

dengan:

$$k_1 = f(x_r, y_r)$$

$$k_2 = f\left(x_r + \frac{1}{4}h,\ y_r + \frac{1}{4}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_r + \frac{1}{4}h,\ y_r + \frac{1}{8}hk_1 + \frac{1}{8}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h,\ y_r - \frac{1}{2}hk_2 + hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_r + \frac{3}{4}h,\ y_r - \frac{3}{16}hk_1 + \frac{9}{16}hk_4\right)$$

$$k_6 = f\left(x_r + h,\ y_r - \frac{3}{7}hk_1 + \frac{2}{7}hk_2 + \frac{12}{7}hk_3 - \frac{12}{7}hk_4 + \frac{8}{7}hk_5\right)$$

Dengan nilai $r = 0,1,2,\ldots,n$ dan $h = x_{r+1} - x_r$

Untuk $x_{r+1} = x_{0+1} = x_1 = 1.0$ diperoleh

$$k_1 = f\left(x_0, y_0\right) = f\left((1.0),(0.40825)\right)$$

$$= -\frac{(1.0+1)^3(0.40825)^3}{2} - \frac{0.40825}{1.0+1} = \text{-}0.47629$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{4}(0.1),\ y_0 + \frac{1}{4}(0.1)(\text{-}0.47629)\right)$$

$$= f\left(1.0+\frac{1}{4}(0.1), 0.40825+\frac{1}{4}(0.1)(\text{-}0.47629)\right)$$

$$= f\left((1.02500),(0.39634)\right) =$$

$$-\frac{(1.02500+1)^3(0.39634)^3}{2} - \frac{0.39634}{1.02500+1} = \text{-}0.45422$$

$$k_3 = f\begin{pmatrix} x_0 + \frac{1}{4}(0.1),\ y_0 + \frac{1}{8}(0.1)(\text{-}0.47629) \\ +\frac{1}{8}(0.1)(\text{-}0.45422) \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} 1.0+\frac{1}{4}(0.1),\ 0.40825+\frac{1}{8}(0.1) \\ (\text{-}0.47629)+\frac{1}{8}(0.1)(\text{-}0.45422) \end{pmatrix}$$

$$= f\left((1.02500),(0.39662)\right)$$

$$= -\frac{(1.02500+1)^3(0.39662)^3}{2} - \frac{0.39662}{1.02500+1}$$

$$= \text{-}0.25904 - 0.19586 = \text{-}0.45490$$

$$k_4 = f\begin{pmatrix} x_0 + \frac{1}{2}(0.1),\ y_0 - \frac{1}{2}(0.1)(\text{-}0.45422) + \\ (0.1)(\text{-}0.45490) \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} 1.0+\frac{1}{2}(0.1), 0.40825-\frac{1}{2}(0.1)(\text{-}0.45422) \\ +(0.1)(\text{-}0.45490) \end{pmatrix}$$

$$= f\left((1.05000),(0.38547)\right)$$

$$= -\frac{(1.05000+1)^3(0.38547)^3}{2} - \frac{0.38547}{1.05000+1}$$

$$= \text{-}0.24672 - 0.18803 = \text{-}0.43475$$

$$k_5 = f\left(x_0 + \frac{3}{4}(0.1),\ y_0 - \frac{3}{16}(0.1)(-0.47629) + \frac{9}{16}(0.1)(-0.43475)\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} 1.0+\frac{3}{4}(0.1), 0.40825-\frac{3}{16}(0.1) \\ (\text{-}0.47629)+\frac{9}{16}(0.1)(\text{-}0.43475) \end{pmatrix}$$

$$= f\left((1.07500),(0.39272)\right)$$

$$= -\frac{(1.07500+1)^3(0.39272)^3}{2} - \frac{0.39272}{1.07500+1}$$

$$= \text{-}0.27057 - 0.18926 = \text{-}0.45984$$

$$k_6 = f\begin{pmatrix} x_0 + 0.1,\ y_0 - \frac{3}{7}(0.1)(\text{-}0.47629) + \frac{2}{7}(0.1)(\text{-}0.45422) + \frac{12}{7}(0.1) \\ (\text{-}0.45490) - \frac{12}{7}(0.1)(\text{-}0.43475) + \frac{8}{7}(0.1)(\text{-}0.45984) \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} 1.0+0.1,(0.40825)-\frac{3}{7}(0.1)(\text{-}0.47629)+\frac{2}{7}(0.1)(\text{-}0.45422)+\frac{12}{7}(0.1)(\text{-}0.454 \\ - \end{pmatrix}$$

$$= f\left((1.10000),(0.35968)\right)$$

$$= -\frac{(1.10000+1)^3(0.35968)^3}{2} - \frac{0.35968}{1.10000+1}$$

$$= \text{-}0.21546 - 0.17127 = \text{-}0.38673$$

Jadi $y_{0+1} = y_1 = y_0 + \frac{1}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right] h$

$$= 0.40825 - 0.04503 = 0.36322$$

Dengan cara yang sama diperoleh hasil seperti dalam tabel 4.1.

Tabel 4.1 Hasil metode Runge-Kutta Orde Lima

r	**x**	**Hasil analitik**	**R-K orde lima**	**galat R-K**
1	1.0	0.40825	-	-
2	1.1	0.36469	0.36322	0.00147
3	1.2	0.32804	0.32573	0.00231
4	1.3	0.29686	0.29410	0.00276
5	1.4	0.27008	0.26710	0.00298
6	1.5	0.24689	0.24383	0.00306
7	1.6	0.22664	0.22360	0.00304

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa metode Runge-Kutta Orde Lima memiliki galat yang relatif kecil yang menunjukkan bahwa tingkat ketelitian metode Runge-Kutta Orde Lima tinggi.

5. KESIMPULAN

Dari uraian pembahasan tersebut, dapat simpulkan bawah

1. Untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial biasa, rumus untuk metode Runge-Kutta Orde Lima yang biasa dipakai adalah:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right] h$$

dengan:

$$k_1 = f\left(x_r, y_r\right)$$

$$k_2 = f\left(x_r + \frac{1}{4}h,\ y_r + \frac{1}{4}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_r + \frac{1}{4}h,\ y_r + \frac{1}{8}hk_1 + \frac{1}{8}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h,\ y_r - \frac{1}{2}hk_2 + hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_r + \frac{3}{4}h,\ y_r - \frac{3}{16}hk_1 + \frac{9}{16}hk_4\right)$$

$$k_6 = f\left(\begin{array}{l} x_r + h,\ y_r - \frac{3}{7}hk_1 + \frac{2}{7}hk_2 + \frac{12}{7}hk_3 \\ -\frac{12}{7}hk_4 + \frac{8}{7}hk_5 \end{array}\right)$$

dengan $h = x_{r+1} - x_r$ dan $r = 0, 1, 2, \ldots, n$

2. Solusi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Lima memiliki tingkat ketelitian yang tinggi.

6. DAFTAR PUSTAKA

Fachruddin, Imam. MetodeNumerik 1. http: //is.its-sby. edu/ subjects/ numerical _methods /Irfan_Metode_Numerik.pdf. (diakses tanggal 4 Juni 2009).

Fardinah. 2009. Skipsi Solusi Persamaan Diferensial Biasa Dengan Metode Runge-Kutta Orde Lima Dan Metode Euler. Makassar: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.

Finizio N & Ladas G. 1988. Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Moderen. Jakarta: Erlangga.

Gunawan, Hendra. Analisis Numerik Lanjut. http: //personal. fmipa.itb. ac.id /hgunawan/files/2007/11. (diakses tanggal 4 juni 2009).

Paduppai, Darwing. 2004. Metode Numerik. Makassar: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.

Santosa, Widiarti dan Pamuntjak R.J. 1994. Persamaan Diferensial Biasa. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi.

Talib, Ahmad. 2004. Masalah Syarat Batas. Jurusan Matematika FMIPA UNM.

Wahyuddin. 1987. Metode Analisis Numerik. Bandung: Tarsito.