SOLUSI INTEGRASI NUMERIK DENGAN METODE SIMPSON (*SIMPSON'S RULE*) PADA TRANSFORMASI HANKEL

Ermawati[i], Wahidah Alwi[ii]m, Nursyamsi[iii]

[i] *Prodi Matematika FST, UINAM, Ermawati@uin-alauddin.ac.id*
[ii] *Prodi Matematika FST, UINAM, Wahidah.Alwi@uin-alauddin.ac.id*
[iii]*Mahasiswa Program Studi Matematika-FST, UINAM*

ABSTRAK, Artikel ini membahas tentang integral tak tentu berupa transformasi Hankel. Salah satu metode integrasi numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan integral tersebut adalah metode Simpson (Simpson's rule). Untuk menghitung integrasi tersebut melingkupi nilai dari titik absis pias dan nilai fungsi dari titik absis pias, dengan penggunaan n titik pada metode Simpson dibatasi pada n = 8, 16, 24, 32, 40 dan 48. Penelitian ini bertujuan untuk: 1)mendapatkan solusi integrasi numerik transformasi Hankel menggunakan metode Simpson (Simpson rule) 1/3. 2) mendapatkan solusi integrasi numerik konduksi panas pada silinder menggunakan metode Simpson (Simpson rule) 1/3. Solusi integrasi numerik transformasi Hankel yaitu $\mathrm{n}_8 = 0{,}217301164$, $\mathrm{n}_{16} = 0{,}21731224$, $\mathrm{n}_{24} = 0{,}217312853$, $\mathrm{n}_{32} = 0{,}217312986$, $\mathrm{n}_{40} = 0{,}217312986$ dan $\mathrm{n}_{48} = 0{,}217312988$ telah memenuhi kriteria pemberhentian 10^{-5}. Metode Simpson 1/3 dapat digunakan untuk mencari solusi integrasi numerik konduksi panas pada silinder, aproksimasi dari panas yang dihantarkan pada silinder yaitu $\mathrm{n}_8 = 2{,}203257893$,$\mathrm{n}_{16} = 2{,}427428998$,$\mathrm{n}_{24} = 2{,}50249395$,$\mathrm{n}_{32} = 2{,}540077619$, $\mathrm{n}_{40} = 2{,}562800972$, dan $\mathrm{n}_{48} = 2{,}576328272$. menunjukkan bahwa semakin besar nilai dari n titik yang digunakan, maka aproksimasi/pendekatan dari panas yang dihantarkan akan semakin baik.

***Kata Kunci**: Transformasi Hankel, Integrasi Numerik, Metode Simpson (Simpson Rule) 1/3, Konduksi Panas*

1. PENDAHULUAN

Penerapan integral banyak didapatkan dalam bidang sains dan rekayasa. Tetapi, terkadang dalam praktek rekayasa fungsi yang diberikan terlalu rumit untuk diintegralkan dengan menggunakan aturan-aturan kalkulus. Selain itu, apabila integral tersebut bersifat multidimensi, fungsi tersebut semakin sulit untuk diselesaikan dan membutuhkan banyak waktu dan tenaga. Salah satu permasalahan yang ditemukan dalam bentuk persamaan integral yaitu transformsi Hankel berbentuk integral tak wajar yang mengandung fungsi Bessel jenis pertama dan fungsi *f(x)* tertentu. Dalam hal ini, permasalahan dalam transformasi Hankel dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari seperti pada bidang fisika yakni perpindahan panas, optik dan lain-lain. Oleh karena itu, solusi analitik dari transformasi Hankel tidak mudah untuk dihitung, Sehingga dibutuhkan metode pendekatan yang tepat untuk dapat menyelesaikan persamaan tersebut secara tepat dan efisien. Metode pengintegralan yang umum digunakan adalah metode numerik, dimana penggunaan metode numerik dapat mendekati atau menghampiri solusi sejatinya. Integrasi numerik suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran dari beberapa integral tentu yang memerlukan penyelesaian numerik sebagai hampirannya. Solusi hampiran yang dihasilkan memang tidak tepat sama dengan solusi analitik. Akan tetapi dapat ditentukan selisih antara solusi analitik dan solusi numerik sekecil mungkin[1]. Integrasi numerik dengan menggunakan aturan Simpson (*Simpson's rule*) terdiri atas dua aturan yaitu Simpson 1/3 dan Simpson 3/8 dan memiliki orde galat yang sama. Namun pada prakteknya, aturan Simpson 1/3 dengan tiga titik sudah dapat diperoleh orde ketelitiannya yang sama dengan empat titik (aturan Simpson 3/8) dengan tiga titik, sedangkan 3/8 pada empat titik [2].

2. TINJAUANPUSTAKA

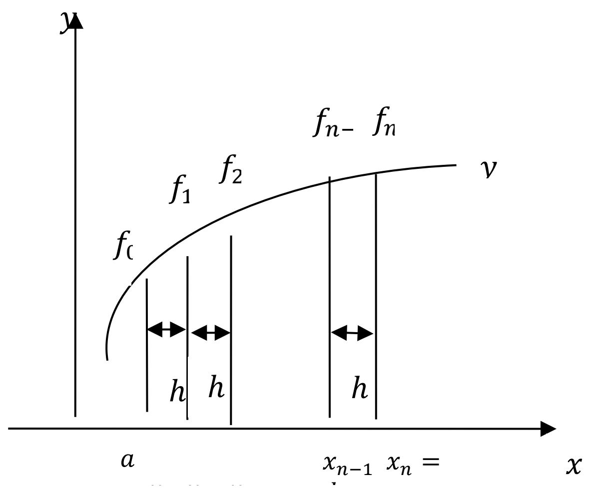
Iterasi Numerik

Pada umumnya, perhitungan integral secara numerik bekerja dengan sejumlah titik diskrit. Untuk fungsi menerus, titik-titik diskrit itu diperoleh dengan menggunakan persamaan fungsi yang diberikan untuk menghasilkan tabel nilai. Dihubungkan dengan tafsiran geometri integral tentu, titik-titik pada tabel sama dengan membagi selang integrasi $[a, b]$ manjadi n buah pias (strip) atau segmen. Lebar tiap pias adalah $h = \frac{b-a}{n}$

titik absis pias dinyatakan sebagai $x_i = a + ih$ $i = 0,1,2, \ldots . n$
Dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah $f_i = f_i(x_i)$
Luas daerah integrasi $[a, b]$ dihampiri sebagai luas n buah pias. Metode integrasi numerik yang berbasis pias ini disebut metode pias [2].

Tabel 2.1 Metode Pias

i	x_i	f_i
0	x_0	f_0
1	x_1	f_1
2	x_2	f_2
3	x_3	f_3
4	x_4	f_4
…	…	…
$n-2$	x_{n-2}	f_{n-2}
$n-1$	x_{n-1}	f_{n-1}
n	x_n	f_n



Gambar 2.1 Metode Pias

Transformasi Hankel

Suatu integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar, seperti integral dengan batas atas tak hingga, integral dengan batas bawah takhingga, dan integral dengan batas atas dan bawah tak hingga[3]. seperti halnya dengan transformasi Hankel yang disebut juga sebagai integral tak wajar yang didefinisikan sebagai berikut :

$$H(x) = \int_0^\infty g(x) J_v(x) x \, dx \qquad (2.1)$$

dimana $J_v(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama berorde v yang didefinisikan sebagai berikut :

$$J_v(x) = x^v \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^{2r+v} r! (v+r)} \qquad (2.2)$$

Jika v sama dengan 0, maka

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} - \frac{x^{10}}{14745600} + \cdots \qquad (2.3)$$

Dan Jika v sama dengan 1, maka [4]

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \frac{x^9}{1474560} - \cdots$$

Untuk mendapatkan solusi dalam bentuk integral transformasi Hankel, di mana kebanyakan kasus , integrasi analitis pada transformasi Hankel di atas sulit untuk diselesaikan oleh sebab itu diperlukan integrasi numerik. Namun, terdapat kesulitan dalam mengevaluasi transformasi Hankel secara numerik apabila:

1. batas integralnya adalah tak terbatas .
2. $g(x)$ menunjukkan perilaku tunggal atau osilasi [5].

Konduksi Panas Pada Koordinat Silinder

Persoalan Transformasi Hankel terdapat pada silinder, salah satunya yaitu perpindahan panas dalam silinder, namun yang akan dibahas pada sripsi ini hanya pada persoalan perpindahan panas secara konduksi. Konduksi panas yaitu perpindahan panas dalam suatu medium tanpa disertai perpindahan partikel dalam medium tersebut. Misalnya, jika salah satu ujung batang besi dipanaskan, maka ujung besi lainnya akan terasa panas. Dalam hal ini, panas akan berpindah dari benda/medium yang suhunya tinggi ke benda/medium yang suhunya lebih rendah. Laju aliran panas dapat dipengaruhi beberapa faktor, antara lain luas permukaan benda yang saling bersensentuhan, dan konduktivitas panas [6]. Apabila suhu dalam keadaan tunak (steady-state) yaitu kondisi sewaktu sifat-sifat suatu sistem tak berubah dengan berjalannya waktu atau dengan kata lain, konstan tanpa pembangkit suhu, maka persamaan konduksi panas pada silinder yaitu:

$$T = T(r, z) = \frac{qp}{k} \int_a^b e^{-xz} J_1(px) J_0(rx) \frac{1}{x} dx \qquad (2.4)$$

Keterangan :
q = laju perpindahan panas (W)
k = konduktivitas thermal $(\frac{W}{m}$ °C)
r = tebal silinder (m)
z = panjang silinder (m)

$p =$ jari-jari silinder (m) [4].

Metode Simpson (Simpson's Rule)

Dengan menggunakan ruas-ruas parabola partisi selang $[a, b]$ dibagi menjadi $n + 1$ buah titik diskrit $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan n berupa bilangan genap bagian yang panjangnya $h = \frac{(b-a)}{n}$, maka kaidah Simpson 1/3 gabungan sebagai berikut.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f_0(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f_2(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$
$$\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad (2.5)$$

Dengan menggunakan notasi jumlahan, persamaan terakhir diperoleh aturan $\frac{1}{3}$ Simpson:

$$S_3(n) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6...}^{n-2} f_i + f_n\right)$$

Berdasarkan persamaan (2.4), maka pola koefisien-koefisein aturan $\frac{1}{3}$ simpson adalah 1,4,2,4,2,4,2,….,2,4,1. Namun penggunaan kaidah Simpson 1/3 mensyaratkan jumlah upselang n harus genap [2].

3. PEMBAHASAN

Pada penelitian ini, ada 2 rumusan masalah yang harus diselesaikan yaitu :

1. Untuk memperoleh aproksimasi transformasi Hankel dengan menggunakan metode Simpson *(Simpson rule)*.

Berdasarkan prosedur penelitian, langkah-langkah yang perlu dilakukan pada tahap ini adalah sebagai berikut:

Langkah 1 : Memberikan persamaan Transformasi Hankel yang akan diselesaikan.

Misalnya $f(x) = \int_a^b x \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} J_0(x)\, dx$, dengan $J_0(x)$ fungsi bessel pertama dengan orde nol pada interval $[0, 1]$.

Langkah 2 : Menghitung titik absis pias yaitu $x_i = x_0 + ih$ dengan nilai awal $x_0 = 0$ dan nilai fungsi pada titik absis pias yaitu $f_i = f(x_i)$, dimana $i = 0,1,2,3$ ...dengan h adalah lebar tiap pias dan banyaknya iterasi (n) buah pias/segmen bilangan genap berdasarkan aturan Simpson 1/3 yaitu sebagai berikut :

Jika $n = 8$, maka $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$

Untuk $i = 0$

$x_0 = x_0 + ih = 0 + 0(0{,}125) = 0$

$f_0 = (x_0)\frac{1}{(1+x_0)^{\frac{3}{2}}} J_0(x_0) = (0)\frac{1}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} J_0(0) = 0$

Untuk $i = 1$

$x_1 = x_0 + 1h = 0 + 1(0{,}125) = 0{,}125$

$f_1 = (x_1)\frac{1}{(1+x_1)^{\frac{3}{2}}} J_0(x_1) =$

$(0{,}125)\ \frac{1}{(1+0{,}125)^{\frac{3}{2}}}\ J_0(0{,}125) = 0{,}104347354$

Selanjutnya dengan cara yang sama di atas nilai titik absis pias (x_i) dan nilai fungsi pada titik absis pias (f_i) dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.1 : Nilai titik absis pias (x_i) dan nilai fungsi pada titik absis pias (f_i) untuk $n = 8$

i	x_i	f_i
0	0	0
1	0,125	0,104347354
2	0,25	0,176101252
3	0,375	0,224405588
4	0,5	0,25541913
5	0,625	0,272244809
6	0,75	0,279988179
7	0,875	0,27557354
8	1	0,270538237

Langkah 3 : Menghitung integrasi numerik dengan metode Simpson 1/3

Setelah didapatkan nilai-nilai $f_i = f(x_i)$ dengan $n = 8, 16, 24, 32, 40$, dan 48. Kemudian di subsitusi ke persamaan metode simpson 1/3 yaitu :

$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Untuk $n = 8$

Berdasarkan Tabel 4.1 nilai f_i disubsitusi ke dalam persamaan metode Simpson 1/3. Sehingga diperoleh :

$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8)$$
$$= \frac{0{,}125}{3}[0 + (4(0{,}104347354)) + (2(0{,}176101252)) + (4(0{,}224405588)) + (2(0{,}255419)) +$$

$(4(0{,}27224481)) + (2(0{,}27998817)) + (4(0{,}2755735\ ))+0{,}270538237]$

$$I = \frac{0{,}125}{3}[5{,}199840524] = 0{,}216660022$$

Sehingga hasil untuk beberapa n titik atau banyaknya iterasi digunakan dapat dilihat pada tabel berikut hasil integrasi numerik berikut dan menghitung galat relatife dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5\times 10^{-5}$

$$galat\ relatif = \frac{eksak - integrsai\ Simpson1/3}{eksak}$$

Tabel 4.2 : Tabel integrasi numerik dengan menggunakan metode Simpson 1/3

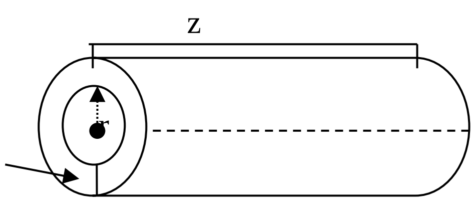
n	Integrasi Sumpson 1/3	Eksak	Galat relative
8	0,217301164	0,2173130053	5,4488 x 10^{-5}
16	0,21731224	0,2173130053	3,52027 x 10^{-6}
24	0,217312853	0,2173130053	6,99452 x 10^{-7}
32	0,217312986	0,2173130053	8,74315 x 10^{-8}
40	0,217312986	0,2173130053	8,74315 x 10^{-8}
48	0,217312988	0,2173130053	7,82282 x 10^{-8}

Berdasarkan Table 4.2 terlihat bahwa diperoleh untuk sejumlah iterasi atau n titik yang diberikan telah terpenuhi, karena galat relatife pada masing-masing titik tersebut $< 5 \times 10^{-5}$ dan semakin besar nilai dari n titik yang digunakan, maka nilai yang diperoleh pun semakin baik.

2. Untuk mendapatkan solusi dari perpindahan panas secara konduksi pada silinder dengan menggunakan metode Simpson 1/3.

Berdasarkan prosedur penelitian, langkah-langkah yang perlu dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : Memberikan persamaan perpindahan konduksi panas pada silinder yang akan diseleaikan yaitu $T = \frac{qp}{k}\int_a^b e^{-xz} J_1(px)J_0(rx)\frac{1}{x}dx$ Misalkan sebuah pipa silindris memiliki 40 mm tebal lapisan isolasi dan jari-jari 80 mm dengan laju perpindahan panas 270,27 W . Panjang pipa tersebut 4 m , Konduktivitas termalnya adalah 0,08 W / m K.



p

Diketahui :
Tebal lapisan isolasi pipa silinder:
$(p) = 40$ mm $= 0{,}04$ m
Jari- jari pipa silinder $(r) = 80$ mm $= 0{,}08$ m
laju perpindahan panas$(q) = 270{,}27$ W
Panjang pipa silinder (z) = 4 m
Konduktivitas termal (k) =0,08 W / m K

$$T = \frac{(270{,}27\ )(0{,}04)}{0{,}08}\int_a^b e^{-4x} J_1(0{,}08x)J_0(0{,}04x)\frac{1}{x}dx$$

Langkah 2 : Menghitung x_0 sampai x_i ,dengan rumus $x_i = x_0 + ih$ dan $T_i = T(x_i)$, dimana $i = 0,1,2,3$ ...Nilai awal $x_0 = 0$, pada interval $[0, 1]$ dengan $i = 0,1,2,3 \ldots$,
Jika 8, maka $h = \frac{\mathrm{b-a}}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$
Untuk $i = 0$
$x_0 = x_0 + ih = 0 + 0(0{,}125) = 0$
$T_0 = (270{,}27)e^{-4x_0}J_1(0{,}08)J_0(0{,}04x_0)\frac{1}{x_0}$
$= (270{,}27)e^{-4(0)}J_1(0{,}08(0))J_0(0{,}04(0))\frac{1}{(0)} = 0$
Untuk $i = 1$
$x_1 = x_1 + ih = 0 + 1(0{,}125) = 0{,}125$
$T_1 = (270{,}27)e^{-4x_1}J_1(0{,}08x_1)J_0(0{,}04x_1)\frac{1}{x_1}$
$= (270{,}27)e^{-4(0{,}125)}J_1(0{,}08(0{,}125))J_0(0{,}04(0{,}125))\frac{1}{(0{,}125)}$
$= \ 6{,}556959367$

Selanjutnya dengan cara yang sama di atas nilai titik absis pias (x_i) dan nilai fungsi pada titik absis pias (T_i) dapat dilihat pada tabel berikut

Tabel 4.3 : Nilai titik absis pias (x_i) dan nilai fungsi pada titik absis pias (T_i) untuk n = 8

i	x_i	T_i
0	0	0
1	0,125	6,556959367
2	0,25	3,976772787
3	0,375	2,411808572
4	0,5	1,462643787
5	0,625	0,886988599
6	0,75	0,537874825
7	0,875	0,32615805
8	1	0,197769214

Langkah 3 : Menghitung integrasi numerik dengan metode Simpson 1/3

Setelah didapatkan nilai-nilai $T_i = T(x_i)$ dengan $n = 8, 16, 24, 32, 40,$ dan 48. Kemudian di subsitusi ke persamaan metode simpson 1/3 yaitu :

$$I = \frac{h}{3}(T_0 + 4T_1 + 2T_2 + \cdots + 2T_{i-2} + 4T_{i-1} + T_n)$$

Untuk $n = 8$

Berdasarkan Tabel 4.3 nilai T_i disubsitusi ke dalam persamaan metode Simpson 1/3. Sehingga diperoleh :

$$I = \frac{h}{3}(T_0 + 4T_1 + 2T_2 + 4T_3 + 2T_4 + 4T_5 + 2T_6 + 4T_7 + T_8)$$

$$= \frac{0,125}{3}(0 + (4 * 27,40248) + (2 * 25,75959) + (4 * 23,81573) + (2 * 21,64063) + (2 * 16,88734) + (4 * 14,45123) + 17,292)$$

$$I = \frac{0,125}{3}(485,772801) = 2,203257893$$

Sehingga hasil untuk beberapa n titik atau banyaknya iterasi digunakan dapat dilihat pada tabel berikut hasil integrasi numerik berikut:

Tabel 4.4 : Integrasi Numerik Konduksi Panas pada Silinder dengan Menggunakan Metode Simpson 1/3.

n	Integrasi Simpson	Eksak	Galat Relatif
8	2,203257893	2,652889500	$1{,}69487499\times 10^{-1}$
16	2,427428998	2,652889500	$8{,}4986767\times 10^{-2}$
24	2,50249395	2,652889500	$5{,}6691223\times 10^{-2}$
32	2,540077619	2,652889500	$4{,}2524154\times 10^{-2}$
40	2,562800972	2,652889500	$3{,}3958643\times 10^{-2}$
48	2,576328272	2,652889500	$2{,}8321636\times 10^{-2}$

Perhitungan integrasi numerik dengan menggunakan metode Simpson (*Simpson rule*) 1/3 untuk mengaproksimasi atau mendapatkan nilai pendekatan dari transformasi Hankel dan model matematika dari konduki panas pada sebuah medium yang berbentuk silinder yang merupakan integral tak wajar. Hal ini bergantung pada n titik atau banyaknya iterasi (n) yang digunakan, semakin besar nilai iterasi yang digunakan maka hasilnya akan semakin mendekati nilai sebenarnya, dimana jumlah n titik atau jumlah iterasinya dibatasi pada n = 8, 16, 24, 32, 40 dan 48.

Pada Tabel 4.7 dapat dilihat hasil perhitungan integrasi transformasi Hankel, untu $n = 8$, $n = 16$, $n = 24$, $n = 32$, $n = 40$ dan $n = 48$ yaitu nilai yang didapatkan 0.217301164, 0.21731224, 0.217312853, 0.217312986, 0.217312986 dan 0.217312988. Adapun kriteria pemberhentian atau batas toleransi diberikan sebesar $\varepsilon = 10^{-5}$, dimana hasil dari integrasi transformasi Hankel telah memenuhi kriteri pemberian 10^{-5} karena galat relatif dari masing-masing n titik lebih kecil dari kriteria pemberhentian. Sedangkan. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar n titik atau jumlah iterasi (n) yang digunakan, maka nilai pendekatan (*aproksimation*) yang diperolehpun semakin baik.

Perhitungan integrasi numerik persamaan konduksi panas pada silinder, dalam hal ini diberikan contoh pada sebuah pipa silinder yang akan dicari nilai aproksimasinya. Adapun batas toleransi atau kriteria pemberhentian yang diberikan sebesar 5×10^{-2}, pada Tabel 4.14 dapat dilihat bahwa nilai pendekatan (*aproksimas*i) pada model matematika dalam konduksi panas pada silinder dengan menggunakan metode Simpson 1/3, dengan beberapa n titik diperoleh 2.203257893, 2.427428998, 2.50249395, 2.540077619, 2.562800972 dan 2.576328272. Hal ini menunjukkan bahwa untuk penggunaan n iterasi yang semakin besar, maka hasil yang diberikan cenderung baik.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan rumusan masalah yang ada serta hasil yang diperoleh dari penelitian ini, maka dapat disimpulkan bahwa :

a. Solusi integrasi numerik menggunakan metode Simpson (*Simpson rule*) 1/3 pada transformasi Hankel $f(x) = \int_a^b x \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} J_0(x)$ dengan jumlah iterasi n titik diperoleh $n_8 = 0.217301164,\ n_{16} =$

$0.21731224, n_{24} = 0.217312853, \quad n_{32} = 0.217312986, \ n_{40} = 0.217312986$ dan $n_{48} = 0.217312988$ menunjukkan bahwa solusi integrasi numerik dihasilkan telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5\times 10^{-5}$.

b. Solusi integrasi numerik konduksi panas pada silinder dengan menggunakan metode Simpson (*Simpson rule*) 1/3 dengan Konduktivitas thermal (k) yaitu 0,08 W / m K, laju perpindahan panas sebesar 270.27 W, $r = 40$ mm, serta nilai p dan z masing-masing adalah 80 mm dan 4 m. Konduksi panas pada silinder $T = \frac{qp}{k}\int_a^b e^{-xz} J_1(px)J_0(rx)\frac{1}{x}dx$ diperoleh aproksimasi panas yang dihantarkan yaitu $n_8 = 2.203257893, \quad n_{16} = 2.427428998, \quad n_{24} = 2.50249395, \quad n_{32} = 2.540077619, \quad n_{40} = 2.562800972$ dan $n_{48} = 2.576328272$. Menunjukkan bahwa semakin besar nilai dari n titik yang digunakan, maka aproksimasi/pendekatan dari panas yang dihantarkan semakin baik

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Sahid. *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta : Andi. 2005.

[2] Munir, Rinaldi. *Metode Numerik*. Bandung : Informatika bandung. 2003.

[3] Kurniawati, Anisa dan Wuryanto. *Penyelesaian Kasus Beberapa Integral Tak Wajar dengan Integral Memuat Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma*. *UJM1*.2012.

[4] Spiegel, Murray. R. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuan*. Jakarta : Erlangga. 2000.

[5] Piessens, Robert. *The Transforms and Applications Handbook : Second Edition*. Katholieke Universieit Leuven : CRC Press LLC. 2000.

[6] Isnaeni, Wiwi. *Fisiologi Hewan. Yogyakarta* : Kansius. 2006.